

LA NUMÉRATION

Partie prenante des apprentissages dits fondamentaux du « lire-écrire-compter », la numération, concept-clé de la mathématique s'il en est, mérite que l'on prenne tout le temps nécessaire à son « auto-socio-construction » dès le C.P¹, mais aussi, sans hésitation lorsque cela s'avère nécessaire, dans des classes ultérieures des cycles 2 et 3.

Il n'est que de constater combien un apprentissage erroné de la numération se répercute tout au long des notions et pratiques abordées qui en découlent :

- techniques opératoires (et notamment notion de retenue).
- calcul mental (multiplication et division par 10, 100,...), repérage d'ordres de grandeur.
- introduction des nombres fractionnaires, décimaux et plus tard au collège, introduction des nombres relatifs, rationnels, irrationnels...(dans leurs différences conceptuelles avec les entiers)
- unités de mesure, multiples et sous-multiples.

Constat qui s'alourdit des temps répétitifs de révision, en classe, tout au long des années, alors que de tels temps s'avèrent inopérants quand ils rappellent seulement les règles d'usage en esquivant combien devrait être rendue nécessaire, incontournable, de donner aux élèves les moyens de la construction par eux-mêmes des principes de la numération, comme condition de pratiques vraiment maîtrisées, puisque enfin comprises, et non pas seulement « appliquées ». Ce qui souligne combien ce n'est aucunement une perte de temps, bien au contraire, que d'aller étapes par étapes, vers une conceptualisation effective, sachant précisément que chacune de ces étapes est un temps d'invention-construction au cours duquel les élèves, en découvrant des savoirs nouveaux, se découvrent eux-mêmes capables de faire et de penser, capables d'apprendre. Ce qui est décisif pour l'élève, dans l'image qu'il se fait de lui-même, par rapport à sa capacité de réussir. Et ce qui ne l'est pas moins, a contrario, pour l'enseignant, si souvent mal à l'aise, voire culpabilisé, devant les échecs des élèves.

Un renversement délibéré est proposé ici, concernant l'apprentissage de la numération. Il s'appuie sur un double parti-pris :

- celui du potentiel d'intelligence que porte tout enfant, avec la conviction qu'un tel potentiel ne peut se révéler que dans la mobilisation des réserves que celui-ci suppose, mobilisation rendue possible à partir de situations et au cours de cheminements dans lesquels il est invité à s'impliquer.

- sachant que tout savoir « savant » étant issu de questionnements, situations, processus constructifs et ruptures créatives, il peut en devenir ainsi pour les savoirs scolaires s'ils sont abordés comme contenus conceptuels et pas seulement comme produits-finis et formels à retenir ou, au mieux, à rendre familiers en vue seulement de leur application.

Le choix pédagogique qui soutient ce double parti-pris refuse le cloisonnement entre une centration sur l'élève d'une part et une centration sur les savoirs d'autre part. Il s'agit de mettre l'accent sur la relation entre élèves et savoirs. Ce qui suppose à la fois un autre rapport à l'apprenant en même temps qu'un autre rapport au savoir² où ce qui fait lien n'est pas moins que de retrouver, dans le présent de l'acte d'apprendre, en classe, les étonnements et la stimulation d'avoir à surmonter des situations faisant écho à celles qui, dans le passé de l'humanité, ont été elles-mêmes surmontées. Ce qui fait lien, c'est de retrouver la part d'aventure humaine qui se loge, comme il en a toujours été, tout au long de l'histoire, au cœur de toute démarche où il y a « à savoir ».

¹ cf :le chapitre « Compter : une aventure humaine » dans: SE CONSTRUIRE DANS LE SAVOIR, à l'école, en formation d'adulte. O.Bassis (ESF, 1998)

² La question de la « transposition didactique » est donc posée autrement, ici (cf : ouvrage cité)

La démarche pédagogique proposée tourne le dos à une forme de pédagogie « active » qui se limiterait strictement aux motivations les plus « spontanées » des enfants, au risque de se fonder sur l'illusion d'une « méthode naturelle » au détriment de la dimension « culturelle » qui est l'apport créatif propre à l'humain³. Et donc l'activité, tout au long des étapes qui suivent, ne se présente pas comme une « méthode » à reproduire au pas à pas mais elle s'inscrit comme un processus au long cours dont chaque phase est réinvestie et approfondie de façon créative dans celle qui la suit.

Des principes préalables :

▪ Le contenu conceptuel : il y a de quoi s'étonner de constater combien on présente généralement comme un fait établi, et donc sans discussion, que le nombre qui suit 9 soit 10, lequel s'écrit tout à coup avec deux chiffres (pourquoi ?) dont l'un (1) est bien peu et le second (0) rien du tout ! Ceci est posé comme évidence et le seul objectif pédagogique revient à en familiariser l'usage auprès des élèves. On leur dit aussi qu'il « faut » grouper, qu'il « faut » déchiffrer de droite à gauche (mais lire de gauche à droite), qu'il « faut » mettre 0, ... Les adultes eux-mêmes, quand ils connaissent le maniement des bases, ont retenu pour règle qu'en base quatre, il « ne faut pas » écrire 4 !

Il s'agit précisément ici de renverser ces « il faut » en faisant redécouvrir (mieux : réinventer !) leurs principes au travers de situations-recherche où, pour surmonter d'apparentes impossibilités, les élèves sont amenés à « agir » ces principes comme *nécessités pour s'en sortir* :

- nécessités issues d'actions menées SUR les objets comme actions que les élèves initient. Ainsi en est-il pour le fait de grouper, et de regrouper encore.

- nécessités issues des échanges à rendre possibles entre apprenants. Ce qui les conduit à chercher des conventions communes de vocabulaire, de codage.

- nécessités dans les deux cas précédents de se donner des procédures à la fois efficaces et commodes : d'où la recherche d'une économie de moyens, tant dans les actions de groupement que dans les codifications à trouver pour garder trace et pour communiquer.

Ainsi passe-t-on d'un apprendre où ne sont retenus que les « comment », c'est à dire en définitive où, en guise de principes, ne sont transmises que des procédures obligées, à un apprendre où les élèves eux-mêmes sont concepteurs des « pourquoi », tout en se construisant la maniement des « comment ».

▪ Les cheminements des élèves :

Il s'agit, dans une telle pratique de démarche de mettre en œuvre un processus d'objectivation de la pensée à partir des représentations et actions propres menées par le sujet qui apprend. Un tel processus repose sur un double va et vient : d'une part entre chacun des élèves et la situation posée (au travers de ses représentations, actions et argumentations) et d'autre part entre les représentations, actions et argumentations de chacun et celles des autres⁴. Et cela, avec des phases spécifiques (dont l'enseignant est le garant), les unes étant de recherche individuelles et les autres de confrontation et d'élaboration collective, avec retours possibles (et souhaitables) à des recherches individuelles. Sachant qu'en bout de course, si le savoir s'est trouvé construit, il l'a été de façon unique pour chacun. Mais il l'est devenu toutefois, au fil des confrontations et élaborations communes, comme un bien partagé. C'est en ce sens où, tout comme il en a été dans la genèse historique des savoirs, si tout savoir s'avère d'abord être un « savoir pour soi », il devient, quand il est objectivé et socialisé un « savoir en soi ». Mais il y faut pour cela tout un périple qui, dans une pédagogie nouvelle, peut être aménagé pour être accéléré et rendu proche aux apprenants mais est par ailleurs ignoré et évité dans une transmission qui se veut seulement magistrale. Une transmission où les élèves sont juxtaposés et les savoirs segmentés⁵.

³ ainsi en est-il aussi, avec des moyens de l'ordre du sensible (intonations, rythmes, effets kinesthésiques..) d'une présentation de la numération par Stella Baruk (Comptes pour petits et grands, Magnard, 1997) qui tourne le dos à toute conceptualisation.

⁴ C'est le schéma décrit par Henri Wallon (cf : De l'acte à la pensée)

▪ L'animation de l'enseignant :

Dans ces cheminements, la part de l'enseignant est ni imposition ni effacement. Position à la fois difficile et vivante. Il est à la fois celui qui impulse, celui qui suscite, celui qui encourage et accompagne mais aussi, conscient de l'importance des cheminements, se met à l'écoute et analyse pour faire rebondir, soutient pour que se poursuive la recherche, sans jamais cependant perdre « le cap » de l'horizon à atteindre. En recherche active, en fait, aussi bien du côté des élèves, puisque ce sont eux qui construisent, que du côté des concepts, puisqu'il en mesure toute la problématique complexe et donc peut en anticiper les moments-clés, l'enseignant a un rôle fondamental à jouer. Dans la mesure où, conscient des enjeux (du côté des élèves comme du côté des savoirs), il est amené à s'apprendre lui-même quand intervenir et surtout quand se taire, quand être à l'écoute et quand prendre distance. Dans les confrontations, il renvoie – suivant une attitude non-interprétative d'effet-miroir – pour que tous entendent telle proposition, pour mettre en avant les contradictions (et non les masquer ni les départager). Il organise les échanges (y compris par des déplacements d'enfants en cours d'activité), crée les conditions d'une rigueur (faire mettre en relation les « dire » et les « faire », faire argumenter, faire revenir à l'action, etc...). Présence à la fois discrète et exigeante, l'enseignant crée les conditions qui permettent aux élèves une formation à l'autonomie de pensée par l'exercice même d'une telle autonomie, qui leur permettent aussi de prendre en compte différences et contradictions, dans l'exercice de la mise en confrontation, de l'argumentation et du débat.

Mais si c'est l'enseignant qui lance et accompagne la recherche des élèves, en bout de course pourtant, il se sera appris lui-même – grâce aux élèves dont il peut découvrir à quel point ils sont capables de cheminer – un sens nouveau au métier d'enseigner. Et s'il y a une forme d'évaluation à partager, avec eux, quand le but ensemble est atteint, ce sera, tant pour les élèves que pour lui, une sorte de fierté et de jubilation.

Des choix pédagogiques :

• L'utilisation de la base quatre : cela peut paraître incongru à un moment où depuis longtemps déjà a été rejeté tout usage scolaire des bases. Il est important de noter qu'un tel rejet était légitime du fait d'un apprentissage qui, loin d'introduire à la numération décimale, ajoutait un apprentissage supplémentaire, alors qu'il s'agit ici de travailler directement en base quatre pour deux raisons fondamentales:

-les principes de la numération et particulièrement le fait d'avoir à grouper, regrouper, etc.. ne peut se comprendre que s'il y a des nécessités à le faire. D'où l'importance d'aborder directement avec les élèves des **nombres de trois chiffres**⁶. On verra par la suite que, paradoxalement, pour parvenir à redécouvrir 10 (dans une base donnée), les apprenants (y compris des adultes !) passent souvent par 100 (puisque ajouter 1 au nombre précédent oblige à chercher comment simplifier l'écriture) avant même de faire un retour jusqu'à 10.

-pour que des actions puissent se mener aisément sur les objets à compter, faut-il ne pas être débordé par la quantité d'objets à manipuler. D'où le **choix de la base quatre** qui permet d'avoir des nombres de trois chiffres sans que, pour certains, il y ait répétition d'aucun d'eux sur des unités d'ordre différent (qui ouvrirait le risque de confusions possibles).

-choix délibéré aussi d'un matériel simple à manipuler, non inducteur⁷, se prêtant commodément aux regroupements et à leur matérialisation. Ce sera donc très simplement le recours à des allumettes (ou des bâchettes, s'il en est encore...) car toute la question est que les élèves ne soient pas conduits à manipuler des objets sur commande mais bien plutôt à être **concepteurs d'actions sur les objets**, c'est à dire moteurs, ingénieurs de *conduites opératoires*⁸ comme assise de tout processus cognitif. A ces allumettes s'ajouteront chemin faisant de petits élastiques qui concrétisent le passage de 4 (allumettes) à 1 (groupe de quatre

⁵ Ainsi trouve-t-on dans les manuels scolaires la numération découpée en autant de leçons que de suites proches d'entiers (inférieurs à 100), ce qui ne se justifie aucunement du point de vue là aussi d'une construction conceptuelle.

⁶ Bien sûr, il s'agit ici de la numération (c'est à dire de l'écriture des nombres) et non du concept de nombre qui, lui précède la numération et donc suppose une démarche spécifique.

⁷ Comme l'était le matériel multibase qui incorporait dans sa fabrication les règles mêmes de la numération (barres, plaques, cubes) et donc empêchait toute invention-construction.

⁸ Terme central apporté par Piaget pour expliciter la construction de schèmes cognitifs chez les enfants.

allumettes) et prépare ainsi le saut qualitatif de changement d'unité d'ordre différent. Et donc mettre ou enlever un élastique prendra, en cours de démarche, tout son sens dans la conceptualisation.

• L'aménagement de la démarche suivant le cycle :

-la démarche présentée ici est celle qui convient dès les CP. Elle a été menée de nombreuses fois, y compris en ZEP⁹. Elle peut être menée ainsi pour tout le cycle 2.

-Au cycle 3 peut être apportée une variante, en introduisant l'existence d'un nombre pair de petits groupes d'élèves (appariés 2 à 2) afin que chaque groupe soit « correspondant » d'un autre groupe. Ainsi la consigne peut devenir : « *Imaginez que chaque groupe est un village du pays de quatre et corresponde avec un autre village pour échanger des moutons avec d'autres animaux* » (le reste de la consigne reste inchangé) en précisant : « *vous avez à écrire à l'autre village combien vous avez de moutons à échanger contre les leurs* ». L'enseignant précise qu'il sera le facteur autant de fois que nécessaire.

-Très tôt peuvent être apportés des documents historiques (os préhistorique avec entailles groupées, calculi pour les Sumériens, écriture cunéiforme, écriture égyptienne, maya, etc...) mais ces apports seront choisis en fonction de l'âge des élèves et ils n'ont de sens qu'en situation de recherche. Donc, il n'est pertinent de les utiliser qu'après que des questions-clés aient été dégagées par les élèves¹⁰. Dès le CM1, une réflexion historique trouve parfaitement sa place. Notamment à propos de l'introduction difficile et contestée du zéro en Occident. Réflexion d'autant plus pertinente qu'elle va avec l'introduction des nombres décimaux et ses avatars, en relation avec l'introduction du système métrique.

Comment mettre en œuvre la démarche sur la numération :

Afin de donner une vue panoramique sur les raisons d'être de différentes étapes suivies, une fiche à la fois global et ramassée de ces étapes est présentée en premier. Il s'agit d'étapes qui se justifient sur le plan de la construction conceptuelle. Ces étapes demeurent quels que soient les aménagements suivant les classes¹¹. Par contre les temps pris pour chaque étape varient :

-En fonction des étapes : ainsi les 2^{ème}, 3^{ème}, et 4^{ème} étapes sont-elles centrales car de leur aboutissement dépend la suite. L'étape 7 est à tenir avec soin car elle fixe notamment de façon irréversible l'usage du zéro. Il n'y a pas à s'inquiéter du temps pris¹². Par contre les conditions matérielles (notamment pour les relations entre élèves et pour les confrontations) jouent un rôle important pour que se maintienne une dynamique tonique dans la classe.

-Dans le déroulé des étapes qui suit, plusieurs types d'analyse et observations : soit des indications quant au but conceptuel de l'étape et donc quant aux processus qui s'y jouent, soit des exemples vécus par des élèves avec des analyses éventuelles, soit des observations pour l'animation.

Bien sûr tout n'est pas dit, explicité de ce qui peut se vivre, car chaque démarche vécue apporte ses surprises, ses prises de conscience, tant du côté des élèves qu'en ce qui concerne l'enseignant lui-même¹³. Mais parmi ces surprises, l'enseignant peut y trouver quelque envie de poursuivre.

⁹ Il n'est pas second de noter que, partant d'actions concrètes sur les objets, elle ne présente aucune difficulté d'entrée aux élèves qui s'y trouvent ensuite de plain pied dans son déroulement. D'autant justement que les conditions d'une transmission magistrale en sont totalement absentes.

¹⁰ Cf en annexe des documents possibles et des indications sur l'opportunité de leur apport en fonction des étapes de la démarche.

¹¹ Y compris auprès d'adultes en formation.

¹² Temps bien inférieur à celui que prend l'ensemble des leçons portant seulement sur des nombres de deux chiffres !

¹³ il n'est pas rare d'entendre tel ou tel enseignant dire ses découvertes, concernant le concept de numération, à partir de ce qu'il a observé chez ses élèves, et de le mettre en rapport, après coup, avec tel ou tel apport historique de telle ou telle civilisation.

1^{ère} étape : FAIRE

...quand l'impossible à compter peut être déjoué !

On commencera en *base quatre*. On donne à chaque enfant (travail individuel indispensable) un tas de bâchettes (« 30 » en système décimal, ce qui donnera plus tard 132 en base quatre). Des précautions sont à prendre pour le choix du 1^{er} nombre proposé, et afin de ne pas ajouter de superflu dans cette première recherche, décisive pour la suite :

- éviter le « 0 » car on l'introduira plus tard ;
- éviter qu'un même chiffre soit répété, prenant ainsi des valeurs différentes d'unité.

La situation proposée est la suivante :

« Imaginez que vous habitez dans un pays où on ne sait compter et écrire les nombres que jusqu'à quatre (compris). On l'appellera le PAYS DE QUATRE. Et voilà que vous avez un troupeau de moutons à vendre (ou à échanger). Pour cela, vous avez besoin de savoir combien il y en a. Cherchez que faire pour trouver combien vous avez de moutons. »

Que font les enfants ? Assez spontanément - et après un temps d'étonnement (fait de silence ou d'agitation) la plupart d'entre eux font des petits tas de 4, parfois de 2 ou 3 allumettes¹⁴. Action déjà intéressante, puisqu'a été diminué le nombre d'« objets » à compter. En fait, aux objets à compter, ils viennent d'en substituer de nouveaux, créés par eux de toute pièce : des groupements. Première étape décisive qui sort du « naturel » - et donc qui est déjà dans le « culturel » - puisque fait irruption un apport nouveau, non préétabli qui va désormais intervenir comme matériau de pensée et d'action pour la suite des processus, maintenant enclenchés.

* Un enfant fait autant de tas de 4 qu'il le peut, mettant systématiquement une étiquette numérotée au-dessous de chacun d'eux tout en faisant disparaître, tranquillement, les 2 allumettes restantes dans sa poche :

1	2	3	4	5	6	7

* Un autre s'arrange pour avoir un « compte juste » (c'est-à-dire des tas tous équivalents) et fait donc dix tas identiques de 3 :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

* D'autres font coexister des tas de 4, de 3 ou de 2.

Ce qu'il est important d'observer, de détecter et d'analyser, de la part de l'enseignant, c'est ce que révèlent les modes d'action des élèves, sans se hâter d'interpréter, au risque de perdre des modes de penser qui pourraient échapper alors qu'il y a là, déjà, des processus réflexifs et inventifs en acte. Ainsi, le souci manifeste de certains enfants de faire disparaître les allumettes non groupées traduit - positivement - un besoin de cohérence: ce ne sont pas les allumettes isolées qu'ils comptent désormais, mais des paquets d'allumettes et, à cette étape, ils ont du mal à imaginer qu'il soit possible de compter à la fois des allumettes isolées et des paquets. Il y a là déjà la manifestation d'une action à caractère opératoire, avec une interaction entre la représentation du tout et celle des parties, pour déjà chercher une cohérence globale en faisant subir des « arrangements » dans ce sens : soit éliminer les allumettes qui viendraient déranger la régularité des paquets de 4, soit de faire des paquets systématiques de 3 (puisque avec le nombre donné « ça tombe juste ») et tout cela pour éviter tout ce qui peut apparaître à l'enfant comme dysfonctionnement.

L'enseignant prend soin, sans commentaires, de **faire confronter les différentes façons de faire des enfants**, soit en faisant déplacer les enfants entre eux, soit en reconstituant au tableau plusieurs types d'organisation trouvés. Ce qui peut avoir pour effet un remaniement par certains de leur propre organisation.

¹⁴ Détail pratique: afin que les bâchettes ne se perdent pas, ne tombent pas, ou ne soient pas mélangées à celles du voisin, il peut être commode d'utiliser des couvercles en carton (de boîte à chaussures par ex.) en précisant, si l'on veut, que cela représente le champ dans lequel se trouvent les moutons. De plus, cela facilitera plus tard les déplacements au cours des confrontations.

*L'enseignant propose des élastiques pour matérialiser les paquets*¹⁵. Matérialisation qui prépare la possibilité d'une pré-conceptualisation de l'existence d'unités autres que l'unité première que constituent les allumettes isolées du départ.

Plusieurs possibilités se présentent :

- sont entourés avec des élastiques les paquets de 4 seulement et les 2 allumettes restantes disparaissent, ou sont elles-mêmes entourées, ou sont isolées.
- coexistent paquets de 4, de 3, de 2 avec ou sans allumettes isolées.

2^{ème} étape: DIRE

... quand les actions deviennent objets de réflexion

Invitant les enfants à observer ce qu'ils ont obtenu, dans leur « champ » respectif de moutons, *l'enseignant leur demande alors de verbaliser:*

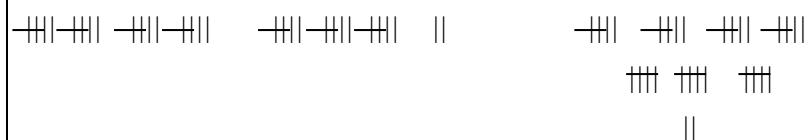
« Cherchez comment dire ce que vous avez fait. Ce qu'il y a maintenant dans votre champ.»
 (on peut préciser un contexte de vente avec un autre village):

- « des groupes de moutons »
- « 8 tas de moutons »,
- «7 paquets et 1 paquet de 2 moutons»...

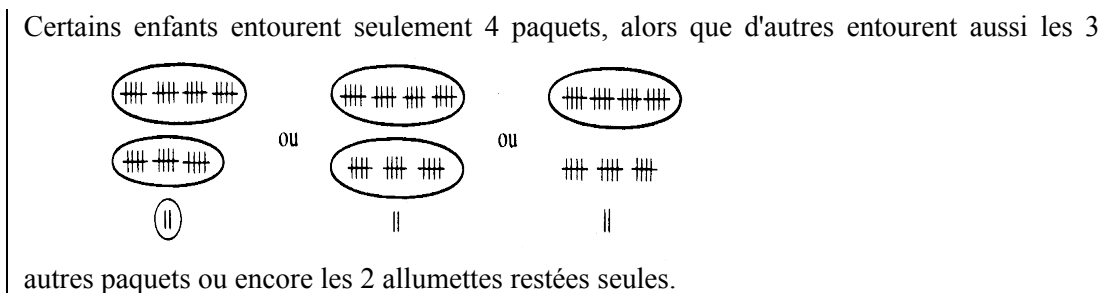
L'enseignant se garde de faire la moindre remarque concernant la justesse ou non de ce qui est dit ou fait. Par contre, il va rappeler ostensiblement la situation du pays de quatre¹⁶: " ON NE SAIT COMPTER QUE JUSQU'A QUATRE ! "

Devant le constat, fait par les enfants, qu'on ne peut comprendre ce qu'ils ont dit, l'enseignant les renvoie à une recherche : "ALORS, QUE FAIRE?"

On peut voir alors certains enfants rapprocher plusieurs paquets d'allumettes. Ainsi, à un alignement régulier des paquets et allumettes commencent à se substituer des rapprochements et organisations du type :



L'enseignant propose aux enfants d'autres élastiques pour aller jusqu'au bout de la matérialisation de ces nouveaux « paquets » ainsi esquissés, sans pour autant leur « montrer » ce qui est à entourer, mais en précisant toutefois, si nécessaire, de ne pas défaire les paquets déjà entourés d'élastiques (il est important, en effet, que les enfants puissent garder sous leurs yeux les étapes cumulées des faire successifs). On voit donc apparaître des «gros» paquets de 4x4. ou de 3x4 et 2x4:



¹⁵ Mais il donne ces élastiques seulement après que chaque élève ait trouvé l'idée de grouper (pour ne rien induire avant).

¹⁶ Car il arrive que les élèves aient groupé par 6, 7, 8...

Là encore, l'enseignant n'intervient pas quant au contenu. Il se contente d'organiser une autre confrontation, en reconstituant par ex. au tableau les « faire » les plus caractéristiques. Une verbalisation pourra être suscitée, sans pour autant en faire, à cette étape là, un objet systématique de travail.

C'est un moment décisif de conduite opératoire. Analysons plus finement.

L'incitation à «faire », c'est-à-dire à la recherche de conduites opératoires (au sens piagétien du terme), ne peut surgir chez l'enfant que s'il a conscience de façon claire: des données concrètes présentes, du but de l'action (ici, compter) et des contraintes de réalité vécues comme contradictoires (on sait bien compter jusqu'à quatre, mais on a beaucoup plus de moutons! !). Donc, ne pas hésiter à répéter aussi souvent que nécessaire la situation de départ! *C' est la perception par l'enfant de l'enjeu (nous dirions: de la problématique) en même temps que de sa propre possibilité d'agir, qui lui donne envie de chercher à surmonter l'obstacle.* Se construire un pouvoir réel, c'est le propre de toute activité réellement humaine et pour lui, enfant, de toute son expérience d'activité ludique, celle où il s'implique le plus parce qu'elle demande le plus de lui comme escalader les rochers, lancer des balles en maîtrisant leur trajet, sauter le plus haut possible au-dessus d'une corde,...

Chercher à éviter les difficultés, en pédagogie, amène à la docilité passive et à l'ennui. Le seul vrai problème pédagogique, dans une démarche d'auto-socio-construction de savoir est de bien cerner *quelles difficultés sont mobilisatrices, c'est-à-dire s'avèrent indispensables pour engendrer des conduites opératoires* comme tentatives de résolution. En ce sens, la seule chose importante est cet auto-questionnement qui va naître chez l'enfant face à la situation, vécue comme « *situation-impasse* » - dans la phase initiale - en même temps que pleine de possibles dépassements. Auto-questionnement non verbalisé, en général, et auquel il ne répond pas, d'ailleurs, verbalement, mais dont il s'empare directement dans une action tâtonnante.

Quand il y a verbalisation (ou seulement balbutiements...) le travail propre SUR cette verbalisation viendra après, sur la base d'actions déjà menées, qui s'affirment, pour les décrire ou les expliquer. Ça ne presse pas.

Les premières séances ne doivent pas durer longtemps, et même, si beaucoup d'enfants sont restés attachés à leurs premiers types de groupements (par 4, 3 ou 2), on s'assurera seulement qu'ils ont pu voir entre eux les différences entre leurs façons de faire. Pour cela on n'hésitera pas à les faire se déplacer d'une table à une autre.

Réinvestissements de faire et dire

Reprendre la même situation que précédemment, mais en **changeant le nombre d'allumettes**, ce nombre étant le même pour tous les enfants, afin de rendre possibles les confrontations ultérieures. On prendra par ex. « 27 » en système décimal, soit « 123 » en base quatre; ou encore « 39 » en système décimal, soit « 213 » en base quatre.

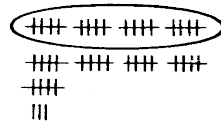
Bien rappeler avec soin les données initiales de la situation. Les enfants vont aller plus vite. Pour ceux qui s'arrêtent à un seul type de groupement (par 2, 3 ou 4 allumettes), et donc avec un nombre de groupements qui dépasse 4, il faut rappeler qu'on est au «pays de quatre» et qu'on ne peut donc compter que jusqu'à 4(compris), sinon on ne comprend pas. Organiser un échange (confrontation visuelle) entre les différents résultats obtenus par les enfants, en laissant toujours la possibilité à chaque enfant de revenir sur ce qu'il a fait.

Après plusieurs tâtonnements, reprises :

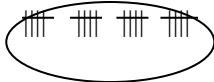
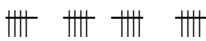
Nouvelle consigne: « **Après ce que vous avez fait, vous allez chercher une phrase qui explique ce que vous avez maintenant dans votre champ.** »

L'enseignant va aider (orthographiquement) les enfants à écrire cette phrase ; quand un mot revient plusieurs fois, il l'écrit au tableau (ex. : tas, paquet, groupe... moutons, bûchettes). L'enseignant respecte scrupuleusement, pour chaque enfant, la phrase proposée et s'assure que chacun en a produit une. On peut arrêter là la séance en gardant précieusement chaque phrase accompagnée du « faire » correspondant (le couvercle et ses paquets de bûchettes).

Par exemple on voit :



désigné par: « 1 gros paquet, 4 paquets, 1 petit paquet et 3 seuls ». Il y a cohérence entre les paquets réalisés et leur désignation, mais incohérence quant à la coexistence :

d'un gros paquet  et de 4 paquets: 

De même incohérence entre petit paquet et paquet qui désignent la même chose.

Sans qu'il y ait formulation d'une phrase, d'autres dessins manifestent les types différents de paquets :



L'enseignant va préparer la séance suivante en observant soigneusement les différents « faire » des enfants et les phrases correspondantes. L'enseignant n'a pas à s'inquiéter de la multiplicité des réalisations du moment : elles manifestent la réalité de l'activité des élèves et même, pour chacune d'elles, d'une part d'invention, de mode de représentation qui se cherchent. L'enseignant peut trouver là une invitation à chercher lui-même comment analyser ces productions pour y trouver des éléments à faire travailler et confronter. Il n'a pas à tirer des conclusions de ce qu'il voit mais à faire mettre en mots les différents choix des enfants qui, en définitive, après quelques tâtonnements, s'expriment : au niveau des faire comme au niveau des dire. Sans doute peut-il s'avancer à poser des questions aux enfants, questions-miroir dont le but est de renvoyer l'enfant à sa propre réflexion et non pas de lui apporter des réponses prévues à l'avance¹⁷.

De nombreuses discordances seront relevées, bien sûr, mais ce sont précisément elles qui vont provoquer la réflexion, comme autant d'obstacles, là aussi, à dépasser. *C'est l'effort pour y parvenir qui engendrera la cohérence comme objet de conquête et non comme constat passif édicté d'en haut.*

Donc, l'objectif du maître, dans sa préparation, n'est pas de masquer ces discordances, mais au contraire de *choisir* exprès les productions contradictoires, qu'il amènera à comparer. Ce sera l'objet de la séance suivante de partir de ces productions pour les faire observer .

3^{ème} étape: FORMULER

...quand les actions sont différenciées, coordonnées, socialisées

A) Le travail se fait à partir d'un même nombre d'allumettes (« 30 » en numération décimale) pour les traiter en base quatre.

L'enseignant présente au tableau, bien en vue, ceux des travaux des enfants qu'il a choisis (par leurs différences spécifiques et non pas parce que ce seraient « les meilleures »), avec toutes les précautions matérielles propres à bien visualiser les paquets réalisés (collés au scotch ou dessinés) et la phrase correspondante.

Par exemple, il pourra y avoir une incohérence entre la phrase et les paquets faits, auquel cas la mise en relation du faire et du descriptif fera surgir, dans son va-et-vient, la modification nécessaire.

On pourra trouver par exemple :

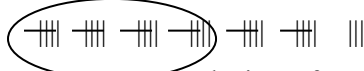


¹⁷ Eviter les QRCA (Questions aux Réponses Connues à l'Avance)

décrit comme « 1 gros paquet et un petit paquet ».

Est incorrect ce qui est désigné par petit paquet puisque sont regroupés aussi bien 2 paquets de 4 et 1 paquet de 3 (sous le terme petit paquet). Le positif, cependant, ici, est dans la distinction faite entre les désignations des 2 types de paquets (par les qualificatifs « gros » et « petits »). Il pourrait y avoir des termes spécifiques, comme train et wagon ou encore troupeau et bergerie, etc...

Ou encore, face à une organisation correcte :



on peut trouver plusieurs façons différentes de la désigner :

1) - soit « 3 moutons et 3 moutons seuls » : l'enfant dissocie mentalement l'unité d'ordre zéro (les moutons seuls) des autres unités (moutons attachés), mais le vocabulaire est encore impuissant, ne sachant pas signifier ce qui est groupement.

- soit « 3 paquets et 3 moutons seuls », où apparaît dans le vocabulaire la distinction entre l'unité d'ordre zéro et les unités d'ordre supérieur (mais indifférenciation entre ces dernières) puisque sont nommés de la même façon des paquets de nature différente.

2) « je vois 4 moutons attachés, 2 moutons et 3 qui sont seuls » : les différentes unités sont dissociées (mentalement) mais pas dans leur appellation (sauf une esquisse dans le besoin de préciser « attachés ») ;

3) « 2 paquets de 4, 1 gros paquet de 4 et 3 tout seuls » : la différenciation des 3 ordres d'unités apparaît dans leur désignation. Toutefois, le descriptif (1 gros paquet de 4) est encore insuffisant.

L'erreur, de la part de l'enseignant, serait de chercher à tout rectifier. Ce serait prématuré. Il a à chercher justement comment relancer pour que ce soient les élèves eux-mêmes qui rectifient, ajustent en s'appliquant à mettre en relation des mots utilisés par les élèves et les types de paquets que veulent désigner ces mots.

Il va être attentif aux observations des enfants, pour les pousser jusqu'au bout (de leur propre logique). Ça peut être dans la direction de:

- les paquets ne sont pas les mêmes (différences de nature entre les types de groupement, c'est-à-dire les unités d'ordre 2 et 3),

- dans l'un il y a des moutons non attachés et dans l'autre ils sont tous attachés (perception de l'unité d'ordre zéro par rapport aux autres).

A partir du moment où un fil est tiré, il faut organiser le va-et-vient entre la parole des enfants et le résultat concret. Exemple: « pourquoi dis-tu que les paquets ne sont pas les mêmes ? », « montre-les ». Il ne faut pas hésiter à défaire et refaire l'un ou l'autre des paquets pour **mieux montrer ce que l'on désigne et mieux désigner ce que l'on montre**. Chemin faisant, les incohérences seront forcément repérées par les enfants, le juge étant non pas l'enseignant, mais le faire, avec la médiation des autres enfants qui pourront trouver qui des mots, qui des faire en guise d'argumentation.

Exemple : 1 paquet de 4x4 bâchettes est forcément plus gros qu'un paquet de 4. Les enfants sont ainsi amenés à vouloir utiliser des mots différents pour nommer des paquets différents, ou inversement le même mot pour désigner un même type de paquet (troupeau, wagon, paquet...)

Par exemple, entre tas, groupe et paquet, le mot choisi pourra être paquet. Et entre paquet de 4x4 et paquet de quatre ils pourront prendre comme terminologie « gros paquet » et « petit paquet » ; ou encore paquet pour désigner ceux de 4 et tas pour ceux de 4x4.

L'important est la justification concrétisée de chaque choix, dont une mémoire écrite pourra être marquée par l'enseignant dans un coin du tableau, accompagnée du matériau correspondant (bâchettes ou dessin).

Toute cette phase est loin d'être un moment de vocabulaire formel. Elle est un moment décisif de pré-conceptualisation puisque *travail de différenciation des types de groupement opérés* - c'est-à-dire *approche des différents ordres d'unités*. Et le travail sur les mots, dans un renvoi constant au faire, permet cette mise à distance nécessaire à la prise de conscience, tout en donnant corps symbolique à l'outil mental en voie de construction.

Les enfants auront pu remarquer que certains moutons ne sont pas attachés (par exemple les 3 qui restent seuls) ou au contraire, étant attachés, qu'on fait jouer à ce paquet le même rôle qu'à un paquet de 4. Le maître doit s'emparer, bien sûr, de ces remarques, pour mener une discussion systématique, faire s'exprimer les enfants là-dessus.

Point n'est besoin de vouloir tout clarifier d'un coup. Il peut suffire de constater qu'un enfant affirme « *moi, je les ai pas attachés parce qu'il n'y en avait pas 4* » : affirmation qui ne peut trouver forcément de justification, ici. Ce n'est qu'une multiplicité de manipulations sur des nombres différents et dans des « pays » différents (au bout de plusieurs séances) qui amènera les enfants à percevoir que c'est *plus simple* et plus économique de grouper toujours par 4 (au pays de quatre) ou par 5 (au pays de cinq) et donc que, s'il reste moins (que 4 ou 5), on ne mettra pas un élastique, ce qui n'a plus d'importance puisque les enfants « tolèrent » et comprennent même, maintenant, la coexistence de plusieurs types de groupement (qui prennent chemin faisant statuts d'unités de nature différentes), qui se comptent à la fois séparément et conjointement, pour constituer l'ensemble du nombre recherché.

Il y a là travail de différenciation (des unités différentes à compter séparément) et de structuration (quoique différentes, ces unités forment un tout entre elles, par rapport au dénombrement recherché). C'est la conquête d'un **schème d'action** (dans son déroulement) et d'un **schème de représentation** (dans l'expression qui se formule de l'ensemble) dont chacun contribue à consolider l'autre.

B) On change encore le nombre d'allumettes (« 39 » en numération décimale, qui se traduira par 213 en base quatre). Mais, déjà, on peut tenter de changer de pays (pays de six par exemple) tout en évitant encore de prendre des nombres comportant l'absence d'une unité (posant le problème du zéro) ou la répétition d'un même chiffre pour des unités d'ordres différents.

On répète toujours la situation de départ : « il s'agit de savoir combien il y a de moutons dans mon champ, dans ce pays où on ne sait compter que jusqu'à 4 (ou autre nombre) ».

On laisse faire les enfants. L'observation attentive des enfants par l'enseignant sera le meilleur « contrôle » faisant le point sur leur cheminement, ce qui pourra l'amener à créer des conditions d'accélération pour ceux qui sembleraient « en retard » (par exemple faire déplacer tel ou tel enfant pour observer ce que font les autres - mais pas pour lui montrer ce que fait le « meilleur élève » - pour l'amener à voir plusieurs enfants en cours de travail tout en les incitant à échanger verbalement entre eux.

Cette phase a pour objectif d'asseoir un peu plus les acquis de la phase précédente, de reprendre un moment le va-et-vient entre le faire et le langage. Peut-être y a-t-il un point ou un autre qui sera précisé en cours de route. Chaque enfant ayant terminé ses manipulations, l'enseignant demande la phrase descriptive (ex. : *j'ai 2 gros paquets, 3 moutons et 1 petit paquet*) et là, en situation, il prend 2 ou 3 manipulations et/ou les phrases correspondantes, pour les traiter, sur le champ, avec les enfants.

L'objectif est d'arriver à une dénomination à la fois commune (pour chaque unité) et cohérente (entre les groupements) des différents types d'unités (exemple: gros paquet, petit paquet, troupeau, wagon, moutons seuls) sans se préoccuper encore de l'ordre de leur succession.

Les séances qui suivront n'auront pas d'autre objectif que de fixer les conduites opératoires menées (fabrication des paquets de 4 et des paquets de 4x4 correctement) et le vocabulaire utilisé. Le changement de base (pays de 6, 5 ou 7) accroîtra cette consolidation puisque sera réinvesti un certain *mode de groupement et regroupement comme invariant opératoire*, qui est la marque indiscutable d'une conceptualisation en cours. Bien sûr, il y aura des tâtonnements, mais l'important sera de laisser chaque enfant aller jusqu'au bout

de son faire et, à partir de là, comme toujours, d'organiser la *confrontation dans le va-et-vient du faire et de la verbalisation de ce faire*.

Les enfants ont mené jusque-là une activité de codage: c'est-à-dire, à partir du tas informe de bâchettes, en vrac, fabrication de paquets de différentes « grosseurs »(c'est-à-dire structures internes de groupement) puis désignation du résultat obtenu. Inversement, on peut passer à une activité de décodage. Fixant un pays donné, demander aux enfants de constituer avec les bâchettes ce que représente « 1 gros paquet, 2 petits paquets et 5 bâchettes » qui peut être aussi : « 1 train, 2 wagons et 5 moutons » (c'est-à-dire en utilisant le vocabulaire minutieusement mis au point).

Au terme de cette étape, la conceptualisation des unités d'ordres différents est, de fait, construite, pour l'essentiel et le travail sur les formulations, c'est-à-dire sur les nominalisations des groupements différents réalisés – qui débouchent sur le **choix de mots significatifs** pour les traduire sans ambiguïté – en a été une médiation fondamentale, permettant la conscientisation des invariants.

4e étape : CODIFIER (on sera à la 6e ou 8ème séance)

... inventer une écriture codifiée

Cette étape ne peut être commencée que lorsque tous les enfants de la classe se sont construits réellement (concrètement et mentalement) les différents types d'unités, c'est-à-dire savent faire convenablement, dans un pays donné, les groupements et, de plus, savent les désigner correctement (suivant les conventions de vocabulaire choisies par la classe). Tous les moments de cette étape vont consister en un *travail sur l'écriture elle-même*, pour la réduire, la simplifier, en vue de parvenir à notre mode actuel de codification.

Après avoir pris un nombre précis, dans un pays donné, l'avoir décrit, intervient une nouvelle contrainte:

« Voilà qu'il arrive une maladie curieuse dans ce pays: les habitants ne savent plus écrire de mots : ils ne savent écrire que les chiffres (jusqu'à 4 compris). Alors, comment faire pour qu'on comprenne le message ?

Si les enfants le demandent, on peut préciser qu'on sait quand même faire des dessins mais en évitant que ces dessins soient la reproduction détaillée des groupements réalisés¹⁸.

Une objection pourrait être soulevée : maintenant que les enfants savent bien se servir des mots, pourquoi les leur enlever ? Or, les mots étant les supports des contenus conceptuels (qu'ils ont aidé à dégager), il s'agira de chercher un autre mode de désignation de ces contenus

On entre ici dans le champ spécifique du travail sur les représentations symboliques. Champ décisif où l'imaginaire va trouver de quoi s'exercer.

Les enfants proposent alors des dessins multiples en lieu et place de chaque mot La confrontation leur permettra de voir la nécessité d'une désignation commune et de la choisir. Par exemple :

- ☀ gros paquet (ou train)
- △ petit paquet (ou wagon)
- mouton tout seul

Alors, avec un nouveau nombre, on leur demande de fabriquer « l'étiquette » du nombre. On pourra avoir des écritures différentes :

- Exemple :
- a) ☀☀ □ △△△ écriture de type additif
 - b) 2 ☀☀ 3 △△△ 1 □
 - c) 3 △ 2 ☀ 1 □ écriture de type multiplicatif

¹⁸ Les dessins reproduits dans les pages précédentes voulaient seulement représenter pour le lecteur le concret des allumettes regroupées ou non par des élastiques.

Modes d'écriture qu'on retrouve dans le processus historique de l'écriture numérique (cf.documents).

La confrontation amènera les enfants à constater que: dans *b*) ce n'est pas la peine de mettre 2,3,1, puisque les signes sont répétés et qu'il suffit de les compter (ou inversement inutile de répéter les symboles). Certains enfants peuvent préférer a), d'autres c). On peut laisser ces 2 choix en prenant d'autres bases. Exemple: en base huit comment écrire: 7 petits paquets, 5 gros paquets et 4 tout seuls. L'obligation de compter et recompter les signes répétés (comme dans a) pour ne pas se tromper amènera les enfants à préférer c), perçu désormais comme plus simple et plus commode.

Plusieurs séances peuvent être menées pour cette 4^{ème} étape, avec des activités de codage et décodage, dans des bases différentes. L'enseignant pourra donner des nombres de 2 chiffres pour éviter une fixation sur les nombres de 3 chiffres. Il pourra donner aussi des nombres où l'une des 2 premières unités est « absente », et l'on obtiendra par ex. : 4△ 2☀.

Le « zéro » n'étant pas indispensable ici, il est inutile de le traiter .

On peut, entre-temps, organiser des jeux d'envoi de messages entre enfants ou groupes d'enfants. Ex~ : un enfant envoie un message codé à un autre enfant qui doit le décoder (c'est-à-dire faire les groupements voulus de bâchettes) et inversement. Les enfants verront bien, chemin faisant, qu'il faut préciser le pays à chaque fois.

Quand le maniement de cette nouvelle écriture est bien approprié par tous les enfants, on introduit une dernière contrainte.

5e étape: ÉCRIRE UN NOMBRE SEULEMENT AVEC DES CHIFFRES

...peu de signes pour désigner beaucoup !

« Une nouvelle catastrophe arrive dans ce pays: les gens ne savent même plus dessiner ! Ils ne savent écrire que des chiffres. »

On ne peut donc plus utiliser que : ☀, △, □. Alors, que faire ?

On introduit cette consigne seulement après un dernier maniement (codage) de ces signes et un affichage des différents « messages » ainsi produits. Ex. : au tableau seront affichés, venant d'enfants ou groupes différents :

3 ☀ 2 □ 1 △
1 △ 3 ☀ 2 □
2 □ 3 ☀ 1 △

Après l'énoncé de la consigne, on a pu entendre un enfant s'exclamer :

-«*c'est facile, y a qu'à effacer les dessins*», ce sur quoi l'enseignante prenant l'éponge commence à effacer ostensiblement les dits « dessins ».

-Alors un autre enfant s'écrie: « *mais non, on va rien comprendre!* ».

-L'enseignante arrête, et on commence à s'expliquer. « *Mais on va croire qu'il y a des messages différents !*»...

-«*J'ai une idée, dit un 3^{ème} enfant, on pourrait faire comme quand on se met en rang* ». L'enseignante lui dit: « *fais-le* ». Alors, il cherche un enfant, puis un autre enfant, en évaluant leur taille, les met l'un devant l'autre, puis va chercher un 3^{ème} enfant plus grand que les 2 précédents et il affirme, content: « *On pourrait faire pareil avec les paquets* ». On lui demande de s'expliquer. Il dit: « *On met d'abord*

les «*tout-seuls* » (2) puis les petits paquets (3), puis les gros paquets (1) ». Ce qui donne : 231.
L'enseignante veille à restituer la lecture de ce nombre de gauche à droite : 2,3,1.

La numération positionnelle était trouvée, restait plus qu'à en changer le sens (de droite à gauche).

On peut dire bien sûr que ce qui s'est passé est exceptionnel, trop exemplaire. Disons plutôt que l'exemplaire était la conduite d'animation de l'enseignante de la classe au cours de toutes les séances précédentes, son attention permanente aux actions et productions des enfants, son exigence quant à la poursuite jusqu'au bout de chaque étape.

Bien sûr, il peut y avoir d'autres propositions: **utiliser des couleurs différentes** pour chaque « unité » ou encore des **hauteurs de chiffres différentes**¹⁹.

Il s'agit ici que les enfants explorent (en faisant) chacune des propositions pour être à même d'apprécier par eux-mêmes celle qui leur paraît la plus commode, la plus simple. Si les enfants restent fixés sur le choix de couleurs, on peut introduire comme situation plus contraignante (et réaliste) le fait de n'avoir qu'une couleur à sa disposition.

Dans un CM1 où une enseignante avait fait vivre (mais en raccourci) la démarche de construction de la numération, et après qu'elle ait apporté le sens conventionnel de l'écriture (de droite à gauche), des enfants font remarquer que ce n'est pas normal, puisqu'on lit de gauche à droite. Alors, un élève d'origine maghrébine fait remarquer que, par contre, dans l'écriture arabe, c'est «normal». L'enseignante donne alors à ce moment-là l'information suivant laquelle l'écriture des nombres a été apportée par les Arabes: et voilà l'intrusion, en situation, des valeurs culturelles propres !

La numération positionnelle a donc fait son apparition. L'introduction du « 0 » va alors prendre tout son sens.

On peut observer que la manipulation, encore nécessaire à un certain nombre d'enfants, va être peu à peu délaissée au profit d'une description verbale des différentes unités. Ainsi sera préparé le *passage à la base dix*, pour laquelle la manipulation devient trop encombrante (dix est désigné en montrant les dix doigts et sans que jamais 10 ne soit écrit par l'enseignant; car l'objectif est que ce soient les enfants qui en trouvent l'écriture). Mais il y faudra, avant, l'introduction du « zéro ».

Notons que la lecture des nombres obtenus, quelle que soit la base (y compris la base dix), se fait de gauche à droite en lisant par ex. « trois, un, deux » pour 312.

6e étape: INTRODUCTION DU « ZÉRO »

... *quand représenter « rien » devient indispensable !*

Il est très important que l'introduction du « 0 » se fasse – comme il en a été historiquement – comme nécessité fonctionnelle, pour éviter des confusions dans l'usage généralisé de l'écriture positionnelle.

On revient à la base quatre (pour une manipulation aisée).

« Maintenant que vous savez comment écrire ce que vous avez compté d'un tas d'objets, vous allez chercher à coder, au pays de quatre, les nombres suivants (donnés à partir du système décimal): « 18 », « 24 », « 6 »²⁰

Il s'agit : à « 18 » de faire correspondre : $1*2$ (* ou tout autre signe) qui deviendra 102
à « 24 » de faire correspondre : $12*$ qui deviendra 120
à « 6 » de faire correspondre : $*12$ ou 12 qui deviendra 012 ou 12

On peut organiser un jeu en constituant des équipes doubles. Aux unes, on donne « 18 » bâchettes (soit 102 en base quatre), et aux autres, « 24 » (soit 120). LA CONSIGNE est, pour chaque équipe, de fabriquer un

¹⁹ Procédé utilisé par les Sumériens dans une première étape de l'écriture cunéiforme.

²⁰ Pour des enfants de CP/CE1, on donnera autant de tas d'allumettes que de nombres proposés, pour éviter toute confusion.

message pour l'autre équipe. Quand l'équipe adverse reçoit le message, elle doit le déchiffrer en fabriquant avec les bâchettes les groupements correspondants.

Il y a confrontation ensuite entre les groupements faits au départ par chaque équipe et, après réception du message, avec les groupements correspondants trouvés par l'autre. L'organisation en est délicate, mais les effets très fructueux. Il faut laisser les équipes se rencontrer librement, avant de passer à une réflexion collective sur la base d'exemples choisis par le maître. Les enfants peuvent choisir de mettre un point, ou un trait, pour indiquer l'unité manquante.

Le « 0 » est alors introduit par le maître comme convention. Mais il peut l'être en chemin par les élèves eux-mêmes qui en ont déjà rencontré l'usage. A ceci près qu'ici, il se mettent à comprendre ce qu'ils savaient déjà.

Il est très important d'apporter là des documents et données historiques, le « zéro » étant arrivé rarement (et très tard dans nos pays) dans les civilisations précédentes (cf : documents).

L'enseignant variera les exemples numériques et, là aussi, proposera des activités de codages et de décodages. Entre-temps il introduira, en base quatre, par exemple « 16 » bâchettes (toujours directement données, sans verbalisation) afin que les enfants soient amenés à trouver 100.

Il fera trouver aussi des nombres de 2 chiffres du type 30. Là, les élèves peuvent être tentés de conserver l'écriture de 3 chiffres en mettant 030 par exemple pour 30. C'est la consolidation du principe de l'écriture positionnelle (avec la maîtrise du déchiffrement d'un nombre de droite à gauche) qui amènera les élèves eux-mêmes à considérer comme inutile tout « 0 » se trouvant à la gauche du dernier chiffre non nul le plus à gauche. L'enseignant, là encore, attendra le moment propice pour s'en saisir. Notamment à travers les exercices de codage et décodage. Ainsi sera trouvé par les élèves qu'au pays de quatre, quatre s'écrit 10.

Il est important de constater que 10 (en base quatre) est écrit comme tel par les enfants à partir des réinvestissements qu'ils font des principes de numération, et donc comme un certain aboutissement et non comme point de départ apporté par l'enseignant²¹.

7^{ème} étape : LA SUITE DES NOMBRES

... quand le chiffre 4 en base quatre disparaît !

Tout est prêt pour que les enfants construisent la liste successive des nombres à partir de 1, dans une base donnée. Pour en arriver (en base quatre) à : 1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101, 102, 103, 110, 111, 112, ...

Il faut qu'ils le fassent scrupuleusement, y compris en s'aidant de bâchettes, pour bien saisir les modifications d'écriture qui interviennent (par exemple le passage de 13 à 20, ou encore de 33 à 100).

8^{ème} étape : LA NUMÉRATION DÉCIMALE

...quand la numération décimale dévoile ses secrets!

Les enfants étant libres de réinvestir dans toutes les bases, il y aura un moment où l'enseignant peut demander de donner – oralement cette fois – la suite des nombres dans une base donnée. C'est un moment de jubilation souvent, comme un challenge, où les élèves sont heureux de constater combien ils sont devenus « forts » puisqu'ils peuvent, de tête seulement, compter en allant à leur gré d'un pays à un autre.

Mais arrivera le moment (provoqué aussi bien par quelque enfant) de ce travail en base dix. Il est important de laisser un temps de travail individuel où chacun met les uns sous les autres les nombres successifs trouvés. Dix lui-même sera donc écrit par les enfants 10. Et le suivant de 19 sera naturellement 20, de même que le suivant de 99 sera 100.

Il est arrivé dans une classe qu'un enfant demande à l'enseignant : « Si j'ajoute 1 à 999, qu'est-ce que cela devient ? » L'enseignant ne répondant pas et renvoyant l'enfant à sa recherche, ce dernier revient un moment après en explosant : « j'ai trouvé : ça fait dix cent ! » L'enfant venait de découvrir « mille », son premier nombre de 4 chiffres et créer une nouvelle unité !

²¹ Il y a renversement délibéré ici des progressions pédagogiques usuelles, toujours dans le but d'en faire retrouver la teneur conceptuelle par les élèves.

L'essentiel de l'activité mathématique est terminé, sur la numération. Reste à aborder le vocabulaire spécifique de la base dix.

1) Avec le mot « dix », l'enfant peut lire directement 17, 18, 19. Il faut donc lui apprendre le vocabulaire particulier de « onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize », en constatant que là, dans la racine des mots, est indiqué le nombre des unités (un pour onze, deux pour douze, trois pour treize, quatre pour quatorze, cinq pour quinze et six pour seize).

2) Il peut être préférable de commencer par le vocabulaire des dizaines, de dix à soixante. Ainsi, les enfants sont capables de lire tous les nombres de 17 à 69 inclus.

3) « Cent » peut être rapidement introduit, puisqu'il décuple les pouvoirs de lecture et d'écriture. Ainsi, par exemple, 845 est plus aisément lu que 71. Avec « cent », la lecture de toutes les centaines est appropriée d'un coup. Il en sera de même pour « mille ».

4) Ce n'est que plus tard que seront introduits « soixante-dix » (vestige de la numération à base soixante, d'origine babylonienne), puis « quatre-vingt » (reste de la numération celte à base vingt) et enfin quatre-vingt-dix. Il est utile d'indiquer l'utilisation orale de « septante, octante, nonante », plus conformes à la base dix. De toute façon, on peut attendre plus tard dans l'année de CP pour introduire le vocabulaire usuel. Ce qui n'empêche pas l'utilisation de ces nombres, mais, au contraire, dissocie le processus de construction conceptuelle (née des nécessités internes) de l'introduction obligée des contraintes historico-sociales du vocabulaire usuel.